Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta
Katedra logiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Blicha

Implikační fragmenty intuicionistické výrokové logiky

Implicational fragments of intuitionistic propositional logic

Praha 2010 Vedoucí práce: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.

Poďakovanie:

Touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Vítězslavovi Švejdarovi, CSc. za cenné rady, ochotu a čas, ktoré mi pri písaní tejto práce venoval.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa Martin Blicha

Obsah

Názov práce: Implikačné fragmenty intuicionistickej výrokovej logiky
Autor: Martin Blicha
Katedra: Katedra logiky
Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.
e-mail vedúceho: vitezslav.svejdar@cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci študujeme implikačné fragmenty intuicionistickej výrokovej logiky s konečným počtom atómov. V prvej časti sa podrobnejšie venujeme fragmentu s dvomi atómami, ktorý je dostatočne jednoduchý, aby v ňom bolo možné sledovať vzťahy medzi formulami, zároveň ale nie je príliš triviálny. V ďalšej časti zavádzame pojmy *principálny vrchol* a *principálny model*, ktoré nám umožnia skúmať aj ďalšie fragmenty. V poslednej časti zisťujeme, ako sa zmenia výsledky, ak si do jazyka pridáme konštantu $\perp$.

Kľúčové slová: intuicionistická logika, implikačný fragment, kripkovské modely

Title: Implicational fragments of intuitionistic propositional logic
Author: Martin Blicha
Department: Department of logic
Supervisor: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.
Supervisor's e-mail address: vitezslav.svejdar@cuni.cz

Abstract: In this thesis we study implicational fragments of intuitionistic propositional logic with finite number of atoms. The first part is dedicated to the fragment with only two atoms, which is simple enough to analyze the relations between it's formulas, but is not that trivial. In the next part, we introduce the terms *prime node* and *prime model*, which allow us to examine other fragments. In the last part, we find out how the results change when we add the constant $\perp$ into out language.

Keywords: intuitionistic logic, implicational fragment, Kripke models

1 Úvod

Prvý formálny systém intuicionistickej logiky podal A. Heyting už v 50. rokoch 20. storočia, v snahe o pevný formálny základ pre intuicionistický (konštruktívny) prístup k matematike svojho učiteľa L. Brouwera. Intuicionistická logika sa rýchlo rozvíjala, keďže konštruktívny prístup v matematike si získal mnohých priaznivcov.

V 70. rokoch sa dostali do popredia otázky o probléme rozhodnuteľnosti základných neklasických výrokových logík, na čele s intuicionistickou logikou. V roku 1977 ukázal R. E. Ladner v [Lad77], že modálne logiky K, T, S4 sú PSPACE-kompletné, čo znamená, že úloha rozhodnúť, či daná formula je tautológiou v tej ktorej logike, je PSPACE-kompletná úloha. V roku 1979 dokázal R. Statman v [Sta79] PSPACE-kompletnosť intuicionistickej výrokovej logiky, ale aj jej implikačného fragmentu (aj keď nie je isté, či sa v dôkaze, ktorý predviedol, pri prechode k implikačnému fragmentu vie zbaviť aj konštanty $\perp$). Neskôr, v roku 2003 priniesol V. Švejdar v [Šve03] nový, sémantický dôkaz PSPACE-kompletnosti intuicionistickej logiky a jej implikačného fragmentu (v tomto dôkaze je už prechod čistý).

Po týchto výsledkoch vyvstala otázka, ktoré fragmenty intuicionistickej logiky sú ešte PSPACE-kompletné. V roku 2006 M. N. Rybakov v [Ryb06] ukázal, že ak máme k dispozícii celú sadu spojok, stačia dva výrokové atómy, a tento fragment ešte bude PSPACE-kompletný. Už predtým ukázali nezávisle na seba Rieger [Rie49] a neskôr Nishimura [Nis60], že vo fragmente s celou sadou spojok, ale len jediným atómom, existuje nekonečne veľa neekvivalentných formúl (ide o známy Rieger-Nishimurov zväz). K zložitosti sa síce nik z nich priamo nevyjadruje, z ich výsledkov je ale jasné, že pre tento fragment existuje polynomiálny algoritmus na určenie, či daná formula je jeho tautológiou. Dokonca už v roku 1974 sa A. Urqhart v [Urq74] zaoberal implikačnými fragmentami intuicionistickej logiky, ale s konečným počtom atómov. Ukázal, že v týchto fragmentoch existuje len konečne mnoho neekvivalentných formúl (k zložitosti týchto fragmentov sa však opäť nevyjadruje). Práve tento jeho výsledok a s ním spojená istá význačnosť týchto fragmentov, nás inšpirovali k bližšiemu skúmaniu (nielen) jeho výsledkov a napísaniu tejto práce. Keďže jeho článok je písaný dosť hutne, my sa pokúsime priblížiť túto tému v sémantickom duchu, pomocou kripkovských modelov, ktoré sú podľa našej mienky zrozumiteľnejšie. Tento prístup bol už s úspechom použitý v spomínaných článkoch [Lad77] a [Šve03].

Táto práca predpokladá základnú znalosť intuicionistickej výrokovej logiky a hlavne orientáciu v jej sémantike — kripkovských modeloch, preto odporúčame tým, ktorí sa s touto logikou často nestretávali, prečítať si napríklad kapitolu o intuicionistickej logike v [Šve02] alebo iný úvod do tejto logiky. Kripkovské modely však zohrajú v tejto práci takú dôležitú úlohu, že si dovolíme čitateľovi pripomenúť definíciu a prácu s týmito modelmi.

Kripkovský model je trojica $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$, kde $W \neq \emptyset$ je množina vrcholov kripkovského modelu, $\leq$ je reflexívne a tranzitívne usporiadanie na W, $\Vdash$ je relácia medzi vrcholmi modelu a formulami, ktorá sa nazýva pravdivostná relácia, alebo tiež *forcing*, a musí splňovať nasledujúce pravidlá (pre a, b ľubovoľné vrcholy modelu, p ľubovoľný výrokový atóm, φ, ψ ľubovoľné výrokové formuly):

- ak $a \Vdash p$ a $a \leq b$, tak $b \Vdash p$,
- $a \nVdash \bot$,
- $a \Vdash \varphi \wedge \psi$ práve vtedy keď $a \Vdash \varphi$ a zároveň $a \Vdash \psi$,
- $a \Vdash \varphi \vee \psi$ práve vtedy keď $a \Vdash \varphi$ alebo $a \Vdash \psi$,
- $a \Vdash \varphi \to \psi$ práve vtedy keď $\forall b \geq a$(ak $b \Vdash \varphi$ tak $b \Vdash \psi$).

$a \Vdash \varphi$ čítame ako "*formula φ je splnená vo vrchole a*". Prvá podmienka pre reláciu $\Vdash$ sa nazýva perzistencia a je jednoduché ukázať, že neplatí len pre atómy, ale pre ľubovoľné formule, t.j. ak $a \Vdash \varphi$ a $a \leq b$, tak $b \Vdash \varphi$. Platí, že intuicionistická logika je korektná a úplná voči kripkovským modelom. To znamená, že každá dokázateľná formula je splnená v každom vrchole každého kripkovského modelu, a naopak, ak formula nie je dokázateľná, tak existuje kripkovský model a v ňom vrchol, v ktorom daná formula splnená nie je. O takomto modeli povieme, že sa jedná o *kripkovský protipríklad* k danej formule. Je známe, že ak formula má kripkovský protipríklad, tak má aj konečný zakorenený protipríklad (zakorenený znamená, že má koreň). Koreňom modelu sa nazýva najmenší vrchol v usporiadaní $\leq$, ak taký existuje. Vybavení týmto aparátom sa môžme pustiť do práce.

2 Implikačný fragment s dvomi výrokovými atómami

V tejto kapitole sa budeme zaoberať implikačným fragmentom intuicionistickej logiky s obmedzením na dva výrokové atómy. Tento fragment nie je triviálny, ako je to v prípade s obmedzením na jeden atóm (len dve neekvivalentné formuly p a $p \to p$), ale je ešte dostatočne jednoduchý, aby sa dal skúmať podrobne a bez väčších ťažkostí. Náš jazyk L vyzerá takto: $L = \{p, q, \to, (,)\}$. máme teda k dispozícii jedinú spojku, implikáciu, a len dva atómy, p a q.

Keďže máme v jazyku len jednu spojku, tak si dovolíme zjednodušiť zápis formúl a implikáciu medzi nimi vynechávať, pričom zátvorky určujúce jednotlivé podformuly berieme ako kumulujúce vľavo. K tomuto zápisu dospejeme postupne.

Príklad Na ukážku nám poslúži Peircova formula $((p \to q) \to p) \to p$, známa klasická tautológia, ktorá však, ako si neskôr ukážeme, nie je intuicionistickou tautológiou. V skrátenom zápise vyzerá takto: $pqpp$.

Ďalším príkladom môže byť použitie pravidla modus ponens. Ak z predpokladov $(p \to q) \to p$ a $p \to q$ odvodíme p, v skrátenom zápise to vyzerá nasledovne: z pqp a pq odvodíme p pravidlom MP.

Jazyk, ktorý máme k dispozícii, je dostatočne bohatý na to, aby sme si mohli definovať ekvivalenciu dvoch formúl.

Definícia Povieme, že formuly φ a ψ sú ekvivalentné práve vtedy, keď $\vdash \varphi \to \psi$ a zároveň $\vdash \psi \to \varphi$, teda z prvej formule je dokázateľná druhá, a naopak.

Otázkou počtu neekvivalentných formúl vo fragmentoch s konečným počtom atómov sa zaoberal ako prvý Urqhart v [Urq74], aj keď konkrétne fragmentu s dvomi atómami veľkú pozornosť nevenoval. Väčšej pozornosti sa tento fragment dočkal v technickej správe Sachia Hirokawu [Hir94], kde je predložený zoznam štrnástich neekvivalentných formúl, avšak získaný z počítačového programu a dôkaz o neexistencii ďalších formúl nie je veľmi názorný. My z tohto zoznamu budeme vychádzať, týmto štrnástim formuliam však venujeme viac pozornosti. V tejto práci budeme operovať s nasledujúcim zoznamom formúl:

$$p,\ q,\ pp,\ pq,\ qp,\ pqp,\ qpq,\ pqq,\ qpp,\ pqpp,\ qpqq,\ pqqp,\ qppq,\ pqqpp/qppqq.$$

(Našu štrnástu formulu sme uviedli v dvoch variantách, neskôr sa uvidí, že pre to existuje dobrý dôvod. Samozrejme, že si dokážeme ich ekvivalenciu, a dokážeme aj ekvivalenciu s formulou, ktorú používa Hirokawa, a ktorá je odlišná od obidvoch našich variánt.)

V ďalšej časti si dokážeme, že predložené formuly sú skutočne neekvivalentné a preskúmame vzťahy, ktoré medzi nimi panujú. Napríklad ktorá formula je silnejšia ako iná, ktoré sú naopak z hľadiska vyplývania neporovnateľné, a pod. Tieto vzťahy zakreslíme do prehľadného obrázku. V nasledujúcej kapitole sa potom dopracujeme k dôkazu o neexistencii ďalších neekvivalentných formúl.

2.1 Vzťahy medzi formulami

V tejto časti sa pustíme do skúmania predložených formúl. Predtým si ale zavedieme pomocné pojmy a ukážeme si ich použitie na príklade, na ktorom si zároveň precvičíme skrátenú notáciu.

Definícia *Duálnou formulou* k formule φ nazveme takú formulu, ktorá má každý výskyt atómu p vo φ nahradený atómom q a naopak.

Pozorovanie (Princíp duality)
Každý dôkaz po zdualizovaní formúl ostáva správnym dôkazom.

Na jednoduchom príklade si ukážeme spôsob dokazovania, ktorý budeme používať v celej práci. Zároveň by sa mala objasniť platnosť princípu duality.

Príklad Z predpokladu $p \to pq$ už sme schopní dokázať formulu pq. Zároveň z predpokladu $q \to qp$ už vieme dokázať formulu qp.

Dôkaz Z predpokladu $p \to pq$ chceme odvodiť pq. Zápis pq ale skrýva implikáciu $p \to q$, a implikáciu dokazujeme tak, že sa z antecedentu snažíme odvodiť konzekvent. Antecedent si teda môžme pridať do predpokladov a snažíme sa dospieť ku konzekventu. Ak použijeme celý zápis, tak v tomto prípade by sme chceli z predpokladov $p \to (p \to q)$ a p odvodiť záver q. To už dokážeme aplikovaním pravidla MP. Najprv z formúl $p \to (p \to q)$ a p odvodíme formulu $p \to q$, následne z formúl $p \to q$ a p odvodíme druhým použitím pravidla MP formulu q, ku ktorej sme chceli dospieť.

Úplne analogický dôkaz, už v skrátenej podobe, použijeme pre duálnu formu. Z predpokladu $q \to qp$ chcem odvodiť formulu qp, to znamená, že nám stačí z predpokladov q a $q \to qp$ odvodiť p. To ale dostaneme dvojnásobným použitím pravidla MP tak, ako sme to ukázali vyššie. Z implikácie $q \to qp$ a jej predpokladu q odvodíme formulu qp. Z formuly qp a jej predpokladu q máme hľadaný záver p. $\square$

Vidíme, že sme naozaj použili ten istý postup, len sme vymenili výskyty atómov p a q. V ďalšom texte už nebudeme duálne dôkazy uvádzať, len sa odvoláme na princíp duality.

Teraz sa už môžme pustiť do skúmania vzťahov vyplývania medzi týmito formulami.

Poznámka Povieme, že *z formuly φ vedie šípka do formuly ψ*, ak platí $\vdash \varphi \to \psi$, teda ak z formuly φ je dokázateľná formula ψ. (Táto terminológia sa nám bude hodiť, keďže tieto vzťahy medzi formulami by sme v obrázku chceli zachytiť práve šípkami.)

Prvé šípky dostaneme z inštancií prvého axiómu hilbertovského kalkulu $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, totiž ak za formulu φ budeme dosadzovať jednotlivé atómy. Príkladom je formula $p \to ((p \to q) \to p)$ ktorú dostaneme dosadením atómu p za φ a formuly pq za ψ. To vlastne znamená, že implikácia $p \to pqp$ je dokázateľná formula, teda z p povedie šípka do pqp. Podobnými substitúciami sme schopní ukázať dokázateľnosť týchto formúl: už spomenutá $p \to pqp$, nasledovaná formulami $q \to qpq$, $p \to qpp$, $q \to pqq$, $p \to pqqp$, $q \to qppq$, $p \to qp$, $q \to pq$, $p \to pqpp$, $q \to qpqq$, $p \to pqqpp$, $q \to qppqq$.

K ďalším šípkam sa dopracujeme použitím rovnakej metódy z princípu $\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$. Za formulu $\varphi \to \psi$ dosadíme už dokázanú, logicky platnú implikáciu, a za χ budeme dosadzovať atómy. Tento princíp si ale musíme najprv dokázať.

Dôkaz Z predpokladov $\varphi \to \psi$, $\psi \to \chi$ a φ chceme dostať χ, na to nám ale stačí 2 krát použiť pravidlo MP. Z predpokladov $\varphi \to \psi$ a φ dostávame ψ, z predpokladu $\psi \to \chi$ a odvodenej formule ψ dostávame χ. $\square$

Dôsledok Aplikáciou predchádzajúceho princípu dostávame ďalšie šípky. Z dokázateľnosti formuly $p \to qp$ dostávame $\vdash qpq \to pq$ (za χ sme dosadili q), princíp duality nám navyše dáva $\vdash pqp \to qp$. Rovnako z formuly $p \to qpp$ dostávame $\vdash qppq \to pq$ a $\vdash pqqp \to qp$, z formuly $pqqp \to qp$ máme $\vdash qpp \to pqqpp$ a $\vdash pqq \to qppqq$, a nakoniec z formuly $qpq \to pq$ máme $\vdash pqq \to qpqq$ a $\vdash qpp \to pqpp$

Nasledujúce šípky síce nedostaneme použitím žiadneho podobného princípu ako v predchádzajúcich prípadoch, ľahko ich však dokážeme priamo.

Tvrdenie Nasledujúce formule sú dokázateľné.
(a) $pqp \to pqq$, (b) $qpq \to qpp$, (c) $qp \to qpqq$, (d) $pq \to pqpp$.

Dôkaz Postupne si dokážeme všetky štyri formuly.

(a) Z predpokladu pqp chceme dospieť k záveru pqq. To je ale implikácia, jej predpoklad pq si teda pridáme do predpokladov a snažíme sa odvodiť jej záver q. Na predpodklady pqp a pq ale môžme aplikovať pravidlo MP, keďže pq je predpoklad implikácie pqp. Odtiaľ dostávame formulu p a z nej a druhého použitia predpokladu pq dostávame ďalšou aplikáciou pravidla MP záver q.

(b) Stačí nám aplikovať princíp duality na dôkaz (a).

(c) Máme predpoklady qp a qpq, chceme záver q, na to nám ale stačí jedno použitie pravidla MP(qp je predpoklad implikácie qpq).

(d) Aplikujeme princíp duality na dôkaz (c). $\square$

Posledné dve šípky dostaneme aplikovaním vyššie uvedeného princípu na šípky, ktoré sme práve dokázali. Konkrétne, z logickej platnosti formuly $pqp \to pqq$ dostávame $\vdash pqqp \to pqpp$, a rovnako z logickej platnosti formuly $qpq \to qpp$ dostávame $\vdash qppq \to qpqq$.

Nakoniec ešte ukážeme dôkazy ekvivalencií všetkých variánt štrnástej formule, ako sme to sľúbili na začiatku.

Tvrdenie Formula $pqqpp$ je ekvivalentná so svojou duálnou formou $qppqq$, aj s formulou $(p \to q) \to ((q \to p) \to p)$, ktorú uvádza Hirokawa.

Dôkaz Postupne ukážeme obe ekvivalencie. Najprv ekvivalencia duálnych foriem.

$\Rightarrow$: Z predpokladov $pqqpp$ a $qppq$ chceme odvodiť q. Ale z formuly $qppq$ vedie šípka do pq. To znamená, že z predpokladu $qppq$ vieme odvodiť formulu pq. Z formuly pq a predpokladu $pqqpp$ odvodíme formulu qpp, a konečne z formuly qpp a predpokladu $qppq$ dostávame požadovaný záver q.

$\Leftarrow$: Aplikujeme princíp duality na dôkaz prvého smeru.

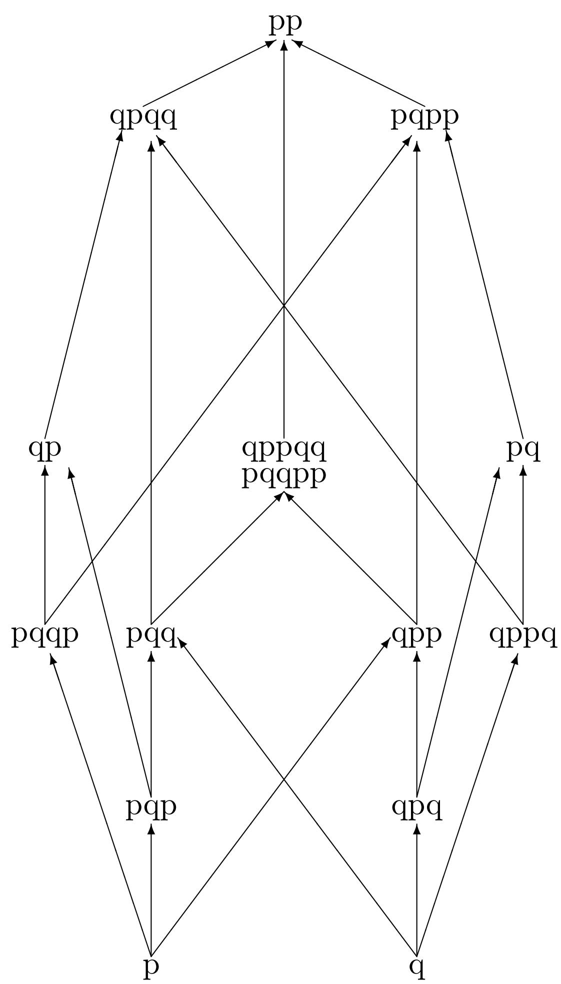
Ostáva ešte ekvivalencia s Hirokawovou variantou, $pqqpp \Leftrightarrow pq \to qpp$.

$\Rightarrow$:Z predpokladov $pqqpp$, pq a qp chceme odvodiť p. Z $pqqpp$ a pq máme formulu qpp, z nej a z predpokladu qp dostávame aplikáciou pravidla MP záver p.

$\Leftarrow$: Pomôžeme si vyššie dokázanou ekvivalenciou a ukážeme, že platí $pq \to qpp \Rightarrow qppqq$. Máme k dispozícii predpoklady $pq \to qpp$ a $qppq$, chceme dospieť k záveru q. Vieme ale, že z predpokladu $qppq$ sme schopní odvodiť formulu pq. Z nej a z predpokladu $pq \to qpp$ odvodíme formulu qpp. Z nej a z predpokladu $qppq$ dostávame použitím pravidla MP požadovaný záver q. $\square$

Teraz už máme k dispozícii všetko, čo potrebujeme, aby sme mohli zakresliť vzťahy medzi týmito formulami do obrázku. Keďže vlastnosť odvoditeľnosti, reprezentovaná šípkami, je reflexívna ($\varphi \vdash \varphi$) a tranzitívna (ak $\varphi \vdash \psi$ a $\psi \vdash \chi$, tak $\varphi \vdash \chi$), tak reflexívne a tranzitívne šípky nebudeme zakresľovať, keďže by nám to zbytočne zneprehľadnilo obrázok. Tieto vlastnosti ale musíme mať na pamäti. Zároveň vieme, že do pp vedú šípky z každej formuly, keďže táto formula nám vlastne hraje funkciu konštanty $\top$, a tá je dokázateľná z každej formule.

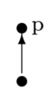
Náš obrázok teda vyzerá takto:



V ďalšej časti ukážeme, že tento obrázok je kompletný. Musíme ukázať, že tieto formule sú skutočne neekvivalentné, musíme ukázať, že sme zachytili všetky šípky, a nakoniec musíme ukázať, že žiadna ďalšia neekvivaletná formula sa v tomto fragmente nevyskytuje. Jednoduchšia časť je dokázať, že žiadne dve z týchto štrnástich formúl nie sú navzájom ekvivalentné. Pomôžeme si známym faktom, že intuicionistická logika je slabšia ako klasická, preto ak dve formule nie sú ekvivalentné v klasickej logike, nemôžu byť ekvivalentné ani v intuicionistickej.

Tvrdenie V implikačnom fragmente klasickej logiky s dvomi atómami existuje 6 neekvivalentných formúl.

Dôkaz Ide len o jednoduché hranie si s výrokovými ohodnoteniami. Dva atómy nám dávajú štyri rôzne ohodnotenia. Prvé priradí obom atómom jedničku, druhé ohodnotí p jednotkou a q nulou, tretie opačne a štvrté priradí obom nulu. Štyri rôzne ohodnotenia dávajú teoreticky $2^4 = 16$ neekvivalentných formúl, niektoré z nich ale nemajú ekvivalent v čisto implikačnom fragmente. Konkrétne pri prvom ohodnotení je splnená každá implikačná formula, na toto ohodnotenie môžme teda pri ukazovaní neekvivalencie zabudnúť. Ostalo nám teda teoreticky $2^3 = 8$ možných formúl. Dve možnosti ale opäť nemôžu nastať, keďže pre žiadnu implikačnú formulu nemôže platiť, že by bola ohodnotená nulou zároveň druhým aj tretím ohodnotením. Ide o jednoduchý dôsledok toho, že ak je splnený atóm najviac vpravo v implikačnej formule, tak je splnená celá formula. Ostatných šesť možností už ale vieme vyjadriť pomocou implikačných formúl. Sú to tieto formule: p, q, pq, qp, pqq, pp. $\square$

Našich štrnásť formúl sa nám rozpadne na šesť skupín, podľa toho, s ktorou formulou sú klasicky ekvivalentné (pre toto priradenie sme zvolili symbol $\rightleftharpoons$, napravo je množina intuicionistických formúl, naľavo je formula, s ktorou sú všetky formule z pravej strany klasicky ekvivalentné).
$p \rightleftharpoons \{p, pqp\}$, $q \rightleftharpoons \{q, qpq\}$, $pqq \rightleftharpoons \{pqq, qpp, pqqpp\}$, $qp \rightleftharpoons \{qp, pqqp\}$, $pq \rightleftharpoons \{pq, qppq\}$, $pp \rightleftharpoons \{pp, pqpp, qpqq\}$.
Ako sme už spomenuli vyššie, stačí nám ukázať neekvivalentnosť formúl v rámci jednej skupiny. Na začiatok musíme ukázať, že formuly v rámci skupiny pp nie sú vzájomne ekvivalentné, to nám uľahčí zvyšnú prácu. Aby sme ukázali, že $pqpp$ nie je ekvivalentné s pp, potrebujeme nájsť kripkovský model, a v ňom svet, kde táto formula nebude splnená. Týmto modelom bude jednoduchý dvojprvkový model: 

Je ľahké nahliadnuť, že tento model odlišuje formulu $pqpp$ od ostatných dvoch z jej skupiny, keďže ona nie je splnená v spodnom vrchole, zatiaľ čo ostatné dve formuly sú splnené v obidvoch vrcholoch. Z princípu duality dostávame aj neekvivalentnosť formúl pp a $qpqq$ (jednoducho v danom vrchole modelu nesplníme atóm p ale q).

Týmto sme ale zároveň vyriešili aj skupiny p a q, keďže $pqpp$ je len skratka implikácie $pqp \to p$ ($qpqq$ je skratka za $qpq \to q$) a my sme ukázali, že to nie je ekvivalentné pp (nie je logicky platná). To ale znamená, že formuly pqp a p nie sú ekvivalentné. Princíp duality zároveň dáva neekvivalenciu formúl qpq a q.

Ďalej sa pozrieme na skupinu pqq. Tu si neekvivalentnosť formúl pqq a qpp ukážeme priamym dôkazom, ktorý je ale dosť pracný (jednoducho sa to dá overiť v hore uvedenom modeli).

Tvrdenie Formule pqq a qpp nie sú v našom fragmente ekvivalentné, keďže platí $\vdash pqq \to qpp \Leftrightarrow pqpp$.

Dôkaz Ukážeme si postupne obe strany ekvivalencie. Využívame postup, ktorý sme už ukázali vyššie, totiž ak sa snažíme odvodiť implikáciu, tak si jej antecedent pridáme k predpokladom a snažíme sa odvodiť konzekvent.

$\Rightarrow$: Z predpokladov $pqq \to qpp$ a pqp chceme dospieť k záveru p. Z predpokladu pqp vieme odvodiť formulu pqq (viď obrázok). Na ňu a predpoklad $pqq \to qpp$ aplikujeme pravidlo MP a dostávame formulu qpp. Ďalej ešte raz využijeme predpoklad pqp a odvodíme si z neho formulu qp. Máme teda v rukách formuly qp a qpp, pravidlo MP nám dáva požadovaný záver p.

$\Leftarrow$: Z predpokladov $pqpp$, pqq a qp chceme odvodiť p. Najprv si ukážeme, že z formúl pqq a qp už vieme odvodiť formulu pqp. pq si pridáme k predpokladom, z pq a pqq dostávame q, z toho a z predpokladu qp máme hľadaný záver p. To nám už dáva všetky potrebné prostriedky. Z predpokladov qp a pqq si teda odvodíme pqp, z pqp a predpokladu $pqpp$ okamžite dostávame požadovaný záver p. $\square$

Dôsledok Týmto dôkazom sme nepriamo ukázali aj to, že ani jedna z formúl pqq a qpp nemôže byť ekvivalentná s formulou $pqqpp$, keďže ak by s ňou jedna z nich bola ekvivalentná, z pricípu duality a ekvivalencie formule $pqqpp$ so svojou duálnou formou by vyplynula aj ekvivalencia druhej formule s $pqqpp$, čo by ale znamenalo, že sú navzájom ekvivalentné, a to sme práve vyvrátili.

Dôsledok Hore uvedený dôkaz nám stačí aj na vyriešenie posledných dvoch skupín. Využijeme totiž, že v intuicionistickej logike platí zámena predpokladov $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \Leftrightarrow \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$. Tento princíp uplatníme na formulu $qp \rightarrow (pqq \rightarrow p)$ a dostávame $qp \rightarrow pqqp \Leftrightarrow pqq \rightarrow qpp$ a to je ekvivalentné s formulou $pqpp$, ako sme už ukázali. Z toho vyplýva, že implikácia $qp \rightarrow pqqp$ nie je logicky platná, formule qp a $pqqp$ nie sú ekvivalentné. Nakoniec princíp duality nám dáva $pq \rightarrow qppq \Leftrightarrow qpqq$. Ani formule pq a $qppq$ nie sú ekvivalentné.

Týmto máme dokázané, že žiadne dve z týchto formúl nie sú navzájom ekvivalentné.

To, že sme skutočne našli všetky formule sa dá ukázať tak, ako sa píše v [Hir94], totiž overili by sme, že každá implikácia $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, kde za formuly ψ_1 a ψ_2 dosadzujeme niektoré z našich štrnástich formúl, už je ekvivalentná s niektorou z týchto formúl. Pomocou všetkého čo sme už ukázali to nie je zložité, ale dosť pracné. Preto na to pôjdeme šikovnejšie a k rovnakému výsledku dospejeme pomocou omnoho prehľadnejších kripkovských modelov. Prístup cez kripkovské modely sme navyše schopní postupne rozšíriť na všetky fragmenty s konečným počtom atómov.

3 Implikačné fragmenty s konečným počtom atómov — kripkovské modely

V tejto kapitole sa podrobnejšie pozrieme na výsledky, ktoré dosiahol Urqhart v [Urq74]. Jeho postupy a výsledky interpretujeme pomocou kripkovských modelov. Ukážeme, že vo fragmente s dvomi atómami sa skutočne nenachádza viac ako spomenutých štrnásť neekvivalentných formúl, a dokážeme, že konečný počet neekvivalentných formúl je vlastnosťou každého fragmentu s konečným počtom atómov.

Neekvivalentnosť formúl budeme ukazovať metódou kripkovských protipríkladov, totiž ak dve formuly nie sú ekvivalentné, tak existuje model a v ňom svet, v ktorom jedna z formúl je splnená, zatiaľ čo druhá nie. Zároveň je známe, že ak existuje protipríklad, tak existuje aj konečný protipríklad. My v tejto kapitole ukážeme, že v našom fragmente môžme toto tvrdenie zosilniť. Ukážeme, že pre náš jazyk platí, že ak existuje konečný protipríklad, tak existuje aj konečný protipríklad, zostavený len z tzv. principálnych vrcholov.

3.1 Principálne vrcholy

Nech $L_n = \{\rightarrow, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ je jazyk implikačného fragmentu intuicionistickej logiky s n atómami.

Definícia Vrchol a kripkovského modelu nazveme *principálnym* práve vtedy, keď existuje atóm p_i taký, že $a \nVdash p_i$ a $\forall b \gneq a : b \Vdash p_i$, teda práve vtedy, keď existuje atóm, ktorý je vo vrchole a nesplnený a vo všetkých ostatných vrcholoch z vrcholu a dosiahnuteľných je splnený. Ak je vrchol principálny vďaka atómu p_i, tak povieme, že je p_i-principálny.

Definícia Kripkovský model nazveme principálnym, ak sú všetky jeho vrcholy principálne.

Našim cieľom je ukázať, že pri hľadaní protipríkladov k formuliam si vystačíme len s principálnymi modelmi. K tejto vete sa prepracujeme postupne pomocou nasledujúcich lemmát.

Lemma 3.1. *Ak a nie je principálnym vrcholom a $\forall b \gneq a$ $(b \Vdash \varphi)$, tak $a \Vdash \varphi$, teda ak a nie je principálnym vrcholom a φ je splnená vo všetkých vrcholoch nad ním, tak je splnená aj vo vrchole a.*

Dôkaz Indukciou podľa zložitosti formule φ:

- φ je atóm.
  Z definície principálnosti platí, že ak vrchol a nie je principálny, tak pre všetky atómy p_i platí: $a \Vdash p_i \vee \exists b \gneq a : b \nVdash p_i$ (buď je atóm vo vrchole a splnený, alebo existuje svet nad vrcholom a, kde splnený nie je). Preto ak vrchol a nie je principálny a nejaký atóm je splnený vo všetkých vrcholoch nad ním, tak musí byť splnený aj vo vrchole a, inak by bol vďaka tomuto atómu principálny.

- $\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$, predpokladáme, že pre podformuly ψ_1, ψ_2 už lemma platí. Nech vrchol a nie je principálny, a formula $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ je splnená všade nad ním, ukážeme, že už musí byť splnená aj vo vrchole a. Vyjdeme z definície splnenia implikácie vo vrchole kripkovského modelu. Keďže daná implikácia je podľa predpokladu splnená všade nad ním, stačí nám overiť, že ak je vo vrchole a splnený antecedent ψ_1, tak je tam splnený aj konzekvent ψ_2. Nech je tam splnený antecedent, $a \Vdash \psi_1$. Potom je ψ_1 splnená aj vo všetkých vrcholoch nad vrcholom a. Lenže vo všetkých týchto vrcholoch je, ako sme už povedali, splnená implikácia $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, a preto všade nad vrcholom a musí byť splnený aj konzekvent tejto implikácie, ψ_2. Formula ψ_2 je jednoduchšia a je splnená všade nad vrcholom a, takže na ňu môžme použiť indukčný predpoklad, a dostávame, že táto formula musí byť splnená aj vo vrchole a, $a \Vdash \psi_2$. Tým ale dostávame, že vo vrchole a je splnená implikácia $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, čo sme chceli ukázať. $\square$

Lemma 3.2. *Ak a nie je principálnym vrcholom a $\forall b \gneq a$, b principálne platí $b \Vdash \varphi$, potom $a \Vdash \varphi$, teda ak a nie je principálnym vrcholom a φ je splnená vo všetkých z neho dosiahnuteľných principálnych vrcholoch, potom je splnená aj v a.*

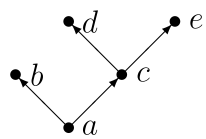
Pre dôkaz tejto lemmy si najprv pripravíme pomocné pojmy.

Definícia Povieme, že vrchol b je *nasledníkom* vrcholu a, ak platí: $b \gneq a$ a zároveň $\neg\exists c\ (b \gneq c \gneq a)$. Teda ak vrchol b, rôzny od a, je z vrcholu a dosiahnuteľný, a zároveň neexistuje ďalší vrchol rôzny od obidvoch, ktorý by bol dosiahnuteľný z vrcholu a a z neho by bol dosiahnuteľný vrchol b. Intuitívne, nasledník vrcholu znamená, že v usporiadaní reláciou dosiahnuteľnosti nasleduje hneď po danom vrchole, analogicky ako nasledník čísla v usporiadaní prirodzených čísel.

Definícia *Hĺbkou* vrcholu a v modeli nazveme maximálny počet krokov po nasledníkoch potrebných k tomu, aby sme sa z vrcholu a po usporiadaní reláciou dosiahnuteľnosti dostali do listu. (Listy teda majú hĺbku 0, vrcholy, ktoré majú za nasledníkov len listy majú hĺbku 1, a tak ďalej. Vždy sa to ráta po najdlhšej vetve z daného vrcholu.)

Hĺbka modelu sa rovná maximu z hĺbok jeho vrcholov. Ak je model zakorenený, tak jeho hĺbka je hĺbkou jeho koreňa.

Príklad Hĺbku vrcholov si ukážeme na jednoduchom príklade.



Vrcholy b, d, e sú listy, takže majú hĺbku 0. Vrchol c má za nasledníkov len vrcholy s hĺbkou 0, takže on sám má hĺbku 1. Nakoniec vrchol a má za nasledníkov vrcholy s hĺbkou 0 a 1. Keďže sa riadime vždy najdlhšou vetvou, tak vrchol a bude mať hĺbku 2.

Pozorovanie Ľahko nahliadneme, že ak $b \gnsim a$, tak vrchol b má menšiu hĺbku ako vrchol a.

Dôkaz (Lemmy 3.2)
Indukciou podľa hĺbky vrcholu.

- vrcholy s nulovou hĺbkou, teda listy:
  Ak list nie je principálnym vrcholom, tak sú v ňom splnené všetky atómy, a keďže sme v pozitívnom fragmente, t.j. nemáme v jazyku negáciu, tak sú v ňom automaticky splnené aj všetky formule.

- Nech lemma platí pre vrcholy hĺbky $\leq m$, ukážeme že platí aj pre vrcholy hĺbky $m + 1$:
  Majme neprincipálny vrchol a hĺbky $m + 1$ pre ktorý platí, že vo všetkých z neho dosiahnuteľných principálnych vrcholoch je splnená φ. Môžu nastať dve možnosti:
  1. φ je splnená vo všetkých vrcholoch nad a, potom podľa Lemmy 3.1 je splnená aj vo vrchole a, čo sme chceli ukázať.
  2. Existuje neprincipálny vrchol $b \gnsim a$ v ktorom φ nie je splnená. Lenže tento vrchol má menšiu hĺbku a zároveň vo všetkých principálnych nad ním je φ splnená, keďže je splnená vo všetkých vrcholoch

nad a a všetky vrcholy nad b sú aj nad a. Na vrchol b teda môžme aplikovať indukčný predpoklad a dostávame, že φ je v ňom splnená. To je ale spor s predpokladom. Táto možnosť teda nemôže nastať. $\square$

Lemma 3.3. *Po vyškrtnutí neprincipálnych vrcholov z modelu v každom vrchole je splnená rovnaká množina formúl ako v pôvodnom modeli.*

Dôkaz Použijeme indukciu cez hĺbku vrcholu v novom modeli a v druhej časti podindukciu cez zložitosť formule.

- Listy: Ak vrchol bol listom aj v pôvodnom modeli, tak keďže splnenosť resp. nesplnenosť formuly v liste záleží len na ohodnotení atómov v danom liste, tak vyškrtanie neprincipálnych vrcholov splnenosť formúl v listoch nemení. Ak sa vrchol stal listom až po vyškrtaní neprincipálnych vrcholov, tak to znamená, že v pôvodnom modeli nad ním boli len neprincipálne vrcholy. Z toho vyplýva, že vo všetkých listoch na ním boli splnené všetky atómy. A nielen v listoch, ale vo všetkých vrcholoch nad ním, pretože ak by v niektorom z nich nebol splnený nejaký atóm, tak na základe toho, že v listoch sú splnené všetky, by sa tam niekde musel objaviť principálny vrchol. Z toho dostávame, že vo všetkých vrcholoch nad skúmaným vrcholom sú splnené všetky formule, a tak sa v ňom splnenosť formúl už vyhodnocuje klasicky, rovnako ako keby listom bol. Rovnako sa to vyhodnucuje aj v novom modeli, kde už listom je, takže ani v tomto prípade žiadna formula nezmení splnenosť v danom vrchole.

- Ukážeme, že ak to platí pre vrcholy s hĺbkou $\leq m$, tak to platí aj pre vrcholy s hĺbkou $m+1$. Na to použijeme podindukciu podľa zložitosti formule, rozlíšime, či formula pred škrtaním vo vrchole platila alebo neplatila.
1\. Atómy: Ohodnotenie atómov vo vrcholoch nemeníme, takže splnenosť, resp. nesplnenosť atómu sa nemení.
2.a) Nech $a \Vdash \psi_1 \to \psi_2$ v pôvodnom modeli. Z definície splnenosti implikácie dostávame, že platí $\forall b \geq a$ (ak $b \Vdash \psi_1$ tak $b \Vdash \psi_2$). Vidíme, že vyškrtnutím niektorých vrcholov sa táto podmienka nemôže porušiť, takže vo vrchole a bude formula $\psi_1 \to \psi_2$ splnená aj v novom modeli.
2.b) Nech $a \nVdash \psi_1 \to \psi_2$ v pôvodnom modeli. To znamená, že $\exists b \geq a$ ($b \Vdash \psi_1$ a zároveň $b \nVdash \psi_2$) v pôvodnom modeli. Rozlíšime prípady $b = a$ a $b > a$.

Ak $b = a$, tak v pôvodnom modeli platí $a \Vdash \psi_1$, $a \nVdash \psi_2$ a keďže sú to jednoduchšie formuly, tak podľa indukčného predpokladu bude platiť to isté aj v novom modeli, a teda vrchol a bude sáme sebe svedkom pre nesplnenosť implikácie aj v novom modeli. Teda aj v novom modeli platí $a \nVdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$.
Ak $b > a$, tak musíme rozlíšiť, či ide o principálny vrchol.
Ak vrchol b je principálny, tak sa nám prenesie aj do nového modelu a keďže má menšiu hĺbku, tak podľa indukčného predpokladu v ňom formuly nemenia splnenosť a preto aj v novom modeli bude naďalej platiť $b \Vdash \psi_1$ a zároveň $b \nVdash \psi_2$. Tým pádom je b svedok, ktorý nás oprávňuje povedať, že aj v novom modeli platí $a \nVdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$.
Ak vrchol b nie je principálny, tak keďže $b \nVdash \psi_2$, Lemma 3.2 nám hovorí, že existuje $c > b$ $(> a)$, c principálny, a $c \nVdash \psi_2$. Zároveň z perzistencie máme $c \Vdash \psi_1$. Vrchol c sa nám prenesie do nového modelu a keďže má menšiu hĺbku ako vrchol a, tak podľa indukčného predpokladu sa vo vrchole c nezmení splnenosť žiadnej z formúl. A keďže $c > a$, tak vrchol c sa v novom modeli stane svedkom oprávňujúcim nás tvrdiť, že $a \nVdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$. □

Veta 3.4. *Ak pre formulu φ z nášho fragmentu existuje kripkovský protipríklad, tak pre ňu existuje aj konečný protipríklad zostavený výlučne z principálnych vrcholov.*

Dôkaz Je známym výsledkom, že ak pre formulu existuje protipríklad, tak pre ňu existuje aj konečný protipríklad. Nech týmto protipríkladom je vrchol a v konečnom modeli M. Ak je a principálnym vrcholom, tak nám v modeli ostane aj po vyškrtnutí neprincipálnych vrcholov a podľa Lemmy 3.3 sa splnenosť formuly φ v tomto vrchole nezmení, teda vrchol a v okresanom, principálnom modeli bude stále protipríkladom pre formulu φ. Ak vrchol a nie je principálnym, tak vzhľadom k tomu, že $a \nVdash \varphi$, tak podľa Lemmy 3.2 existuje principálny vrchol $b > a$, pre ktorý taktiež platí $b \nVdash \varphi$. Tým sme to ale previedli na predchádzajúci prípad. Vrchol b je principálny, ostane v modeli aj po škrtaní neprincipálnych vrcholov, a podľa Lemmy 3.3 sa v ňom nemení splnenosť žiadnej formuly. Vrchol b bude protipríkladom aj v principálnom modeli. □

Teraz, keď vieme, že si vystačíme s principálnymi modelmi, sa môžme pustiť do ich konštrukcie.

3.2 Univerzálny model pre fragment s dvomi atómami

V tejto časti sa opäť vrátime k nášmu implikačnému fragmentu s dvomi atómami p a q. Zostrojovaním kripkovských modelov s principálnymi vrcholmi sa dopracujeme k univerzálnemu modelu nášho fragmentu (t.j. k modelu, ktorý je protipríkladom na všetky formule, ktoré nie sú tautológiami nášho fragmentu) a pomocou neho podáme definitívny dôkaz o štrnástich neekvivalentných formulách, ktorým sme sa venovali v prvej kapitole.

Ako je známe o kripkovských modeloch, na začiatku nám stačí uvažovať o zakorenených modeloch, keďže z každého modelu, ktorý je protipríkladom pre niektorú formulu, vieme vybrať zakorenený podmodel, ktorý je protipríkladom pre tú istú formulu. Zároveň budeme uvažovať čo najjednoduchšie modely, tým máme na mysli, že si zvolíme vždy najjednoduchší model z množiny bisimilárnych modelov. (O bisimulácii ako relácii medzi kripkovskými modelmi sa čitateľ dozvie viac v ľubovoľnej knihe o modálnych logikách. Nám stačí vedieť, že ak sú dva modely bisimilárne, tak ich nevieme rozlíšiť platnosťou žiadnej formule v žiadnom vrchole. Preto, čo sa týka hľadania protipríkladov, vystačíme si s jedným zástupcom z každej množiny) Nebudú sa tam teda vyskytovať vrcholy, v ktorých by boli splnené rovnaké atómy a ktoré by zároveň mali rovnakú množinu dosiahnuteľných vrcholov.

Budeme zostrojovať modely postupne podľa ich hĺbky, od najmenších po najväčšie. Jednoduché pozorovanie nám dá hranicu, po ktorú nám stačí ísť.

Pozorovanie Ak b je následník a v principálnom modeli, tak vo vrchole b je splnených viac atómov ako vo vrchole a.

Dôkaz Vo vrchole b musia byť splnené všetky atómy, ktoré sú splnené vo vrchole a kvôli perzistencii. Lenže vrchol a je principálny, takže existuje atóm, ktorý je v ňom nesplnený a vo všetkých vrcholoch nad ním splnený. Keďže vrchol b je následníkom vrcholu a, tak je v ňom minimálne tento atóm splnený navyše oproti vrcholu a. □

Dôsledok Ak sme vo fragmente s n atómami, maximálna hĺbka principálneho modelu je $n-1$. To okamžite vidíme z predchádzajúceho pozorovania a faktu, že v principálnom liste nemôžu byť splnené všetky atómy.

Keďže sme vo fragmente s dvomi atómami, stačí nám vyšetriť modely hĺbky 0 a 1.

Je jednoduché nahliadnuť, že sú 3 rozličné modely hĺbky 0.

$$p^- \bullet q^- \qquad\qquad p^+ \bullet q^- \qquad\qquad p^- \bullet q^+$$

Model č.1 Model č.2 Model č.3

Keď chceme skonštruovať model hĺbky 1, v koreni nesmieme splniť žiadny atóm, a nad ním už musíme všade jeden splniť. Avšak v žiadnom vrchole nemôžu byť splnené obidva atómy. To znamená, že sú len dva modely hĺbky 1.

$$\begin{tikzcd}
p^+ \bullet q^- & p^- \bullet q^+ \\
p^- \bullet q^- \arrow[u] & p^- \bullet q^- \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Model č.4 Model č.5

Z toho, čo sme doposiaľ ukázali vyplýva, že do väčšej hĺbky ísť nemusíme, a to znamená, že pri hľadaní protipríkladov si vystačíme s týmito piatimi modelmi. To nás oprávňuje vysloviť nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie Ak formula z implikačného fragmentu intuicionistickej logiky s dvomi atómami nie je logicky platná, tak nie je splnená v koreni niektorého z daných piatich modelov.

Navyše, týchto päť modelov vieme zjednotiť do jediného, univerzálneho modelu. Ten bude obsahovať každý z týchto piatich modelov ako podmodel.

Definícia Ak pre daný model platí, že pre každú formulu, ktorá nie je logicky platná, existuje vrchol z tohto modelu, v ktorom daná formula nie je splnená, tak povieme, že ide o *univerzálny* model.

$$\begin{tikzcd}
p^+ \bullet q^- & & p^- \bullet q^+ \\
p^- \bullet q^- \arrow[u] & p^- \bullet q^- & p^- \bullet q^- \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Univerzálny model fragmentu s dvomi atómami

Ako sme už spomenuli, tento model je protipríkladom pre každú formulu, ktorá nie je v našom fragmente logicky platná. Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie.

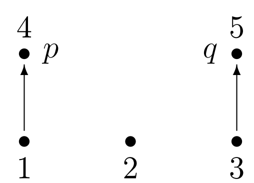
Tvrdenie Dve formule sú neekvivalentné práve vtedy, keď sa líšia v množine vrcholov univerzálneho modelu, v ktorých sú splnené.

Dôkaz Ukážeme si oba smery, najprv ten mierne ťažší.

$\Rightarrow$: Majme dve neekvivalentné formule φ a ψ. Keďže sú neekvivalentné, tak aspoň jedna z implikácií $\varphi \to \psi$, $\psi \to \varphi$ nie je logicky platná. Tým pádom má protipríklad v univerzálnom modeli, teda tam existuje vrchol, kde daná implikácia nie je splnená. Potom tam ale musí existovať aj svet, kde je antecedent splnený a konzekvent nesplnený a to je hľadaný svet, ktorý tieto dve formule rozlišuje.

$\Leftarrow$: Ak naopak máme dve ekvivalentné formule φ a ψ, tak to znamená, že obe implikácie $\varphi \to \psi$, $\psi \to \varphi$ sú logicky platné. Z toho vyplýva, že sú splnené v každom vrchole univerzálneho modelu. Z definície splnenosti implikácie dostávame, že ak v niektorom svete je splnená jedna formula, tak tam musí byť splnená aj druhá z nich. Množiny vrcholov, v ktorých sú splnené, sa preto nemôžu líšiť. □

Vieme, že množina vrcholov modelu, v ktorých je daná formula splnená, je vždy horná množina, t.j. ak do nej patrí určitý vrchol, tak tam patria aj všetky vrcholy z neho dosiahnuteľné. Zrátajme horné množiny v našom modeli. Pre zjednodušenie si očíslujme vrcholy univerzálneho modelu (ku vrcholom už napíšeme len tie atómy, ktoré su v nich splnené).



V tomto modeli existuje 18 horných množín: $\emptyset$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5\}$, čo nám dáva horné obmedzenie na maximálne 18 neekvivalentných formúl. My ale ukážeme, že niektoré z týchto množín nemôžu byť priradené k žiadnej formule.

Definícia Množina vrcholov kripkovského modelu je *definovateľná*, ak existuje formula, ktorá je splnená práve vo vrcholoch tejto množiny.

Tvrdenie Množiny $\emptyset$, $\{2\}$, $\{4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ nie sú v našom fragmente definovateľné.

Dôkaz Prvé dve množiny nie sú definovateľné, pretože každá formula nášho fragmentu je splnená v aspoň jednom z vrcholov 4, 5. To vyplýva z toho, že vrcholy 4 a 5 sú listy, a v listoch sa už splnenosť formuly vyhodnocuje klasicky. V klasickej logike pritom stačí na splnenie formuly, ktorá má ako jedinú spojku implikáciu, splniť atóm vyskytujúci sa vo formule najviac vpravo.

Aby sme to ukázali aj pre druhé dve množiny, pomôžeme si nasledujúcim tvrdením: Ak je formula splnená v oboch vrcholoch 4 a 5, tak musí byť splnená aj v niektorom z vrcholov 1, 3. To si dokážeme sporom.

Nech existuje formula φ, ktorá je splnená v oboch vrcholoch 4 a 5, ale nie je splnená ani vo vrchole 1, ani vo vrchole 3. Vidíme, že sa nemôže jednať o žiadny atóm. Nech teda φ je implikácia tvaru $\psi_1 \rightarrow \psi_2$. Keďže nie je splnená vo vrchole 1, ale je splnená vo vrchole 4, tak musí platiť $1 \Vdash \psi_1$, $1 \nVdash \psi_2$. Potom ale musí platiť aj $4 \Vdash \psi_1$, $4 \Vdash \psi_2$. Analogickou úvahou pre vrcholy 3 a 5 dostávame $3 \Vdash \psi_1$, $3 \nVdash \psi_2$, $5 \Vdash \psi_1$, $5 \Vdash \psi_2$. Vidíme, že pre formulu ψ_2 platí to isté čo pre formulu φ, totiž je splnená vo vrcholoch 4 a 5, ale nie je splnená vo vrcholoch 1 a 3. Ukázali sme, že ak tvrdenie platí pre implikáciu tak platí aj pre jej konzekvent. Predpokladanú formulu φ takto vieme po konečne mnoho krokoch rozobrať až k atómu vyskytujúcemu sa najviac vpravo. Vychádza nám, že tvrdenie by malo platiť aj pre tento atóm, my ale vieme, že pre atómy to platiť nemôže. Máme spor. $\square$

Ostalo nám štrnásť horných množín, ktoré sú kandidátmi na to, aby boli definovateľné. Znamená to, že skutočne v našom fragmente s dvomi atómami máme maximálne štrnásť neekvivalentných formúl. Keďže z predchádzajúcej kapitoly vieme, ktoré formule by to mali byť, môžme každej z týchto štrnástich množín priradiť formulu, ktorá ju definuje. Prehľadne to zachytíme do tabuľky, v ľavom stĺpci je formula, a v pravom množina vrcholov univerzálneho modelu, v ktorých je daná formula splnená, t.j. formula vľavo definuje množinu vpravo.

Formula	Množina vrcholov
p	$\{4\}$
q	$\{5\}$
pqp	$\{1,4\}$
qpq	$\{3,5\}$
$pqqp$	$\{2,4\}$
$qppq$	$\{2,5\}$
pq	$\{2,3,5\}$
qp	$\{1,2,4\}$
pqq	$\{1,4,5\}$
qpp	$\{3,4,5\}$
$pqpp$	$\{2,3,4,5\}$
$qpqq$	$\{1,2,4,5\}$
$pqqpp$	$\{1,3,4,5\}$
pp	$\{1,2,3,4,5\}$

Týmto sme dokázali, že v našom implikačnom fragmente s dvomi atómami existuje skutočne iba štrnásť neekvivalentných formúl. Z univerzálneho modelu vieme ale vyčítať ešte viac, totiž, že vzťahy medzi týmito formulami sme skutočne presne zachytili v obrázku z prvej kapitoly. Platí totiž nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie Ak si označíme A_φ množinu vrcholov univerzálneho modelu, v ktorých je splnená formula φ, tak platí $\vdash \varphi \to \psi$ práve vtedy keď $A_\varphi \subseteq A_\psi$.

Dôkaz Tvrdenie plynie z definície splnenia implikácie vo vrcholoch kripkovského modelu.

$\Rightarrow$: Ak je implikácia $\varphi \to \psi$ dokázateľná, tak platí v každom vrchole každého modelu, konkrétne aj v našom univerzálnom modeli. A to znamená, že ak je v niektorom vrchole splnená φ, tak tam musí byť splnená aj ψ. Z toho už plynie $A_\varphi \subseteq A_\psi$.

$\Leftarrow$: Opačne, $A_\varphi \subseteq A_\psi$ nám vraví, že v univerzálnom modeli v každom vrchole, kde je splnená φ, je splnená aj ψ. To znamená, že v univerzálnom modeli implikácia $\varphi \to \psi$ nemá protipríklad. Ale neexistencia protipríkladu v univerzálnom modeli z definície dáva tejto formule logickú platnosť. $\square$

Tým by sme ukončili naše skúmanie fragmentu s dvomi atómami. Overili sme výsledok o existencii štrnástich neekvivalentných formúl z [Hir94], navyše sme však preskúmali vzťahy medzi týmito formulami, ktoré sme zachytili do obrázku. Okrem toho sme zostrojili univerzálny model pre tento fragment, v ktorom sa dosiahnuté výsledky overujú oveľa prehľadnejšie.

V ďalšej časti sa pozrieme na to, čo sa stane, keď si do jazyka budeme pridávať ďalšie atómy. Ako Urqhart ukázal v [Urq74], kým ostávame vo fragmente s konečným počtom atómov, počet neekvivalentných formúl ostáva konečný. K tomuto výsledku by sme sa chceli dopracovať pomocou našich principálnych modelov.

3.3 Univerzálny model pre fragment s tromi atómami

V tejto časti sa pozrieme, čo sa stane ak si do jazyka pridáme tretí atóm. Opäť budeme zostrojovať modely pozostávajúce z principálnych vrcholov, pokúsime sa zostrojiť univerzálny model a vypozorovať súvislosti pri prechode od dvoch k trom atómom. Tieto by sme potom chceli zovšeobecniť a odvodiť z nich postup pri prechode od n k $n+1$ atómom.

Už vieme, že pri hľadaní protipríkladov si vystačíme s principálnymi modelmi. Navyše vieme, že vo fragmente s tromi atómami si vystačíme s principálnymi modelmi s hĺbkou maximálne 2. Ďalším pomocníkom je rovnocennosť atómov, ktorú sme už využili pre princíp duality. Tá nám vraví, že ak nájdeme principálny model a prepermutujeme atómy, tak dostaneme opäť principálny model. (Príkladom takejto permutácie je napríklad substitúcia q za p, r za q, p za r. Pri troch atómov máme 6 rôznych permutácií, preto z jednej schémy môžme dostať až 6 modelov. Dobre to vidno napríklad na modeloch 32–37, či 38–43, uvedených nižšie.)

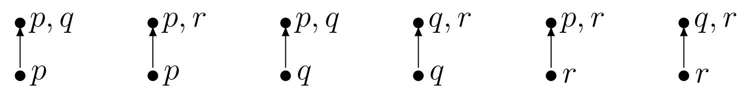
Postupne prehľadáme všetky tri možné hĺbky.

Modely s hĺbkou 0 nájdeme ľahko, jediné čo musíme dodržať je, že v danom vrchole nemôžu byť splnené všetky tri atómy.

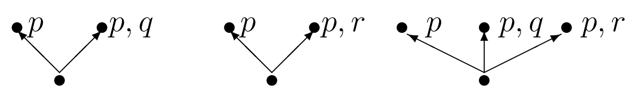
$\bullet$	$\bullet p$	$\bullet q$	$\bullet r$	$\bullet p, q$	$\bullet p, r$	$\bullet q, r$
M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7

Modely s hĺbkou 1 získame postupne. Začneme s lineárnymi modelmi a potom skúšame tieto modely vetviť. Zisťujeme, že maximálne môže mať model hĺbky 1 šírku 3. Ak v koreni nesplníme žiadny atóm, jeden musíme splniť všade nad ním. Potom nám ale ostanú tri možnosti ako môžu vyzerať listy. Buď tam už žiadny atóm nesplníme, alebo tam splníme okrem prvého aj druhý, alebo okrem prvého aj tretí. Takto dostaneme schému modelov 22, 25 a 28. Väčšina ostatných modelov hĺbky 1 vzniká z týchto modelov orezaním niektorých vrcholov. Takto však dostaneme len modely, ktoré v koreni nemajú splnený žiadny atóm. Druhou možnosťou je splniť jeden atóm už v koreni, čím sa vlastne dostaneme do situácie ako pri modeloch hĺbky 1 vo fragmente s dvomi atómami, a v tej sa už vyznáme.

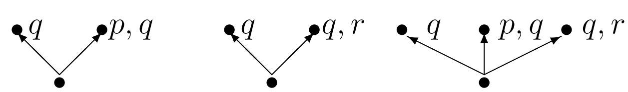
M8 M9 M10 M11 M12 M13



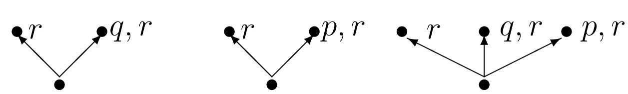
M14 M15 M16 M17 M18 M19



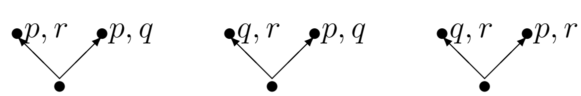
M20 M21 M22



M23 M24 M25

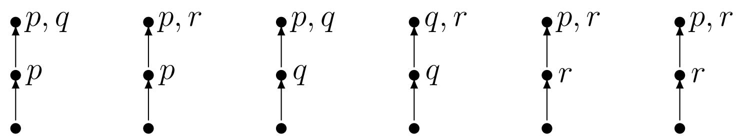


M26 M27 M28

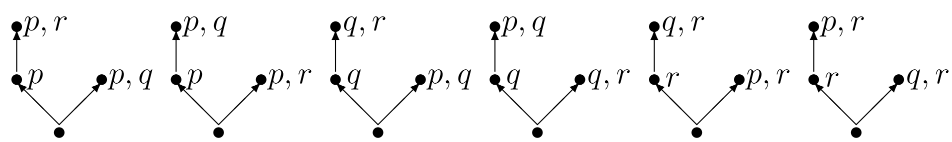


M29 M30 M31

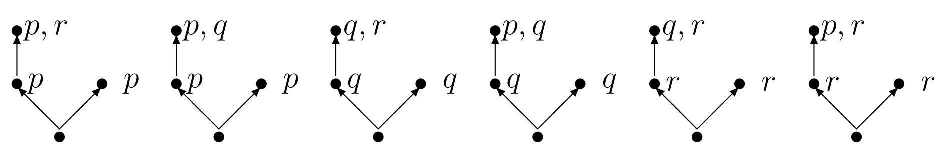
Pre modely hĺbky 2 musí platiť, že v koreni nie je splnený žiadny atóm. Opäť začneme s lineárnymi modelmi a skúšame ich rozvetvovať. Maximálne modely, ktoré môžme dostať sú modely M59–M61. Vidíme, že ostatné modely z maximálnych dostaneme orezávaním vrcholov.



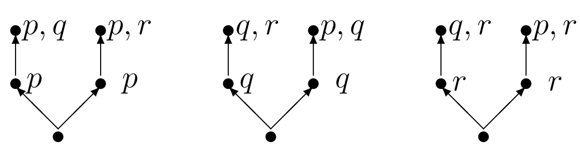
M32 M33 M34 M35 M36 M37



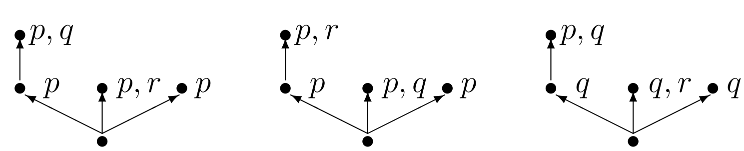
M38 M39 M40 M41 M42 M43



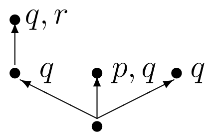
M44 M45 M46 M47 M48 M49



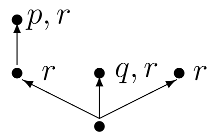
M50 M51 M52



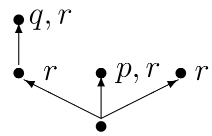
M53 M54 M55



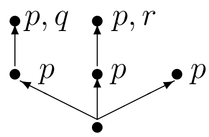
M56



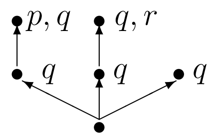
M57



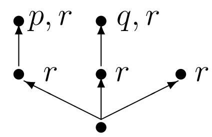
M58



M59



M60



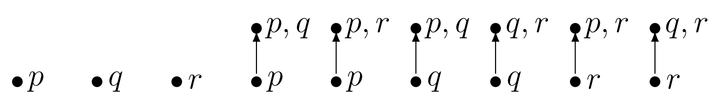
M61

Našli sme 61 zakorenených modelov s principálnymi neopakujúcimi sa vrcholmi, a keďže sme prešli všetky tri možné hĺbky, tak sú to naozaj všetky modely, s ktorými si vystačíme pri hľadaní protipríkladov. To znamená, že ak formula nie je tautológiou vo fragmente s tromi atómami, tak má protipríklad v niektorom z týchto 61 modelov. Z nich by sme teda chceli zostaviť univerzálny model, rovnako ako v prípade s dvomi atómami. Tento model by mal obsahovať všetkých 61 modelov ako podmodely. Mohli by sme ich všetky postaviť disjunktne vedľa seba, to by sa nám ale často opakovali niektoré vrcholy (vyskytli by sa tam vrcholy, v ktorých je splnená rovnaká množina atómov a zároveň majú rovnakú množinu z nich dosiahnuteľných vrcholov). Pozrime sa teda na to, aké vrcholy sa nám v modeloch objavujú. Stačí totiž, ak každý z týchto vrcholov sa bude v univerzálnom modeli vyskytovať práve raz. Podľa toho, koľko atómov je v danom vrchole splnených, dostávame tri skupiny vrcholov.

– tri vrcholy s dvomi splnenými atómami:

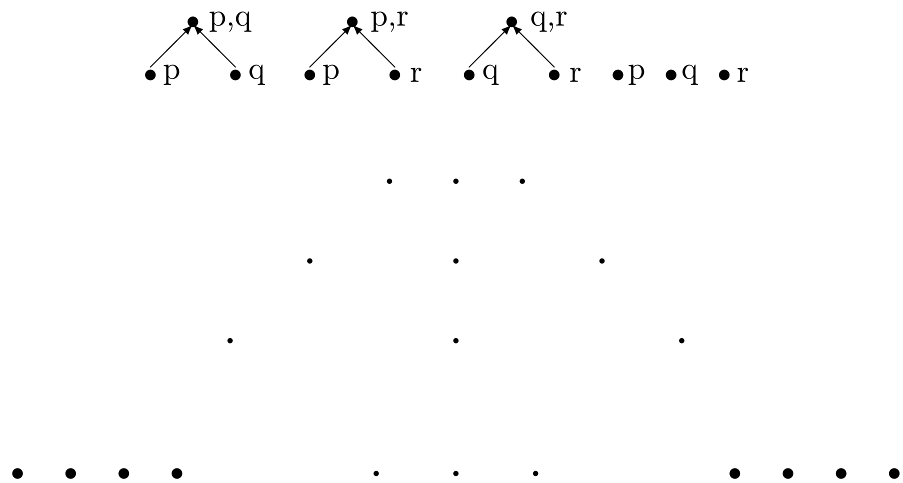
$$\bullet\, p, q \quad \bullet\, p, r \quad \bullet\, q, r$$

– deväť vrcholov s jedným splneným atómom:



– 49 vrcholov, v ktorých nie je splnený žiadny atóm (všetky máme nakreslené vyššie, žiadne dve nie sú rovnaké, nemajú rovnakú množinu z nich dosiahnnuteľných vrcholov).

Našli sme 61 vrcholov, z ktorých môžme konečne zostaviť univerzálny model pre fragment s tromi atómami. Keďže je príliš veľký na to aby sa nám tu zmestil celý, tak si len načrtneme, ako vyzerá.



Náčrt univerzálneho modelu pre fragment s tromi atómami

Tento model sa skladá zo 61 vrcholov a to tak, že hore máme 12 vrcholov tak ako sme ich nakreslili, a pod nimi je 49 minimálnych vrcholov (vrcholov, kde nie je splnený žiadny atóm), ktoré sa líšia tým, ktoré z daných 12 vrcholov sú z nich dosiahnuteľné. Celkovo je síce týchto množín až 2^{12}, musíme si ale uvedomiť, že musí byť zachovaná tranzitivita dosiahnuteľnosti, a predovšetkým principálnosť vrcholov.

V tomto modeli narátame 23 p-principálnych vrcholov (aj 23 q- a 23 r-principálnych, máme totiž šesť vrcholov, ktoré sú principálne vďaka dvom atómom, a jeden vrchol, ktorý je principálny vďaka všetkým trom atómom), čo odpovedá Urqhartovým zisteniam. On určil aj hornú hranicu počtu neekvivalentných formúl v tomto fragmente na $3 * 2^{23}$, čo je lepší odhad, než akého sme my zatiaľ schopní. Našou hornou hranicou je počet horných množín v tomto modeli, čo nám stačí na slabší, ale aj tak podstatný záver o *konečnom* počte neekvivalentných formúl v implikačnom fragmente s tromi atómami.

V nasledujúcej časti sa konečne pozrieme na fragmenty s konečným počtom atómov vo všeobecnosti.

3.4 Konštrukcia univerzálneho modelu pre fragmenty s konečným počtom atómov

V tejto časti zhrnieme a rozšírime to, k čomu sme dospeli v predchádzajúcich kapitolách a tvrdenie o konečnom počte neekvivalentných formúl rozšírime na všetky implikačné fragmenty s konečným počtom atómov.

Ako sme už ukázali, ak sme v implikačnom fragmente s n atómami, tak každý principiálny model má hĺbku najviac $n-1$. Ak by sa nám podarilo modely obmedziť aj v šírke, dostali by sme konečný počet možných zakorenených modelov, s ktorými si vystačíme pri hľadaní protipríkladov. Ale z konečného počtu modelov sa dá zostaviť konečný univerzálny model a konečný univerzálny model znamená konečný počet možných definovateľných množín jeho vrcholov, a to už nám dáva konečný počet neekvivalentných formúl vo fragmente. (Šírkou modelu sa myslí maximálna veľkosť množiny vrcholov takých, že žiaden nie je dosiahnuteľný z ostatných, čo je v podstate veľkosť maximálneho antireťazca v usporiadaní vrcholov.)

Budeme sa držať vyššie uvedeného postupu. Najprv ešte raz preskúmame modely vo fragmente s tromi atómami. Ak si odmyslíme modely M2–M7 a M14–M19 (tie máme obsiahnuté ako podmodely v iných modeloch, takže ich vlastne nepotrebujeme), tak máme všetky modely zakorenené, kde koreň je minimálnym vrcholom. Špeciálnym prípadom je model s jediným, minimálnym vrcholom, ten teraz odložíme bokom. Modely, ktoré nám ostali, sú zakorenené, hĺbky aspoň 1 a koreň je minimálny vrchol. Pozrime sa čo sa stane, ak koreň z takého modelu vypustíme.

Pozorovanie Majme zakorenený principiálny model pre fragment s tromi atómami, kde koreň je minimálnym vrcholom. Potom ak odstránime z modelu jeho koreň a odstránime z jazyka atóm, ktorý robil koreň principiálnym, dostaneme, až na pomenovanie atómov, podmodel univerzálneho modelu pre fragment s dvomi atómami.

Dôkaz Nech koreň bol p-principiálnym vrcholom. Znamená to, že vo všetkých ostatných vrcholoch bol atóm p splnený a ony boli principiálne vďaka iným atómom. Vypustením koreňa sa určite principiálnosť ostatných vrcholov nezmení. Čo je ale podstatné, principiálnosť vrcholov sa nezmení ani vypustením atómu p z jazyka, keďže ten bol splnený vo všetkých vrcholoch, ktoré nám ostali, a teda p nebol tým atómom, ktorý ich robil principiálnymi. Po týchto dvoch operáciách nám ostane v rukách principiálny model pre dva atómy, keďže, ako sme povedali, všetky vrcholy ostanú principiálne, len sa presunieme do jazyka s dvomi atómami. Keďže sa jedná o principálny model pre dva atómy, tak musí byť podmodelom univerzálneho modelu pre fragment s dvomi atómami.

Postup tohto dôkazu ale nie je viazaný na fragmenty s dvomi a tromi atómami, preto ho môžme zovšeobecniť a vysloviť nasledujúce lemma.

Lemma 3.5. *Ak existuje konečný univerzálny model pre fragment s n atómami, tak existuje aj konečný univerzálny model pre fragment s $n+1$ atómami.*

Dôkaz Ukážeme si nielen existenciu, ale priamo konštrukciu tohto univerzálneho modelu z jeho predchodcu. Ak máme univerzálny model pre fragment s n atómami, tak pre fragment s $n + 1$ atómami platí, že každý zakorenený principálny model s minimálnym koreňom má šírku obmedzenú šírkou predchádzajúceho univerzálneho modelu. Totiž model, ktorý vznikne vypustením koreňa a zabudnutím na atóm, ktorý robil koreň principálnym, je principálnym modelom pre fragment s n atómami, a preto musí byť podmodelom univerzálneho modelu tohoto fragmentu. Ide len o zobecnenú myšlienku z predchádzajúceho pozorovania.

Čo s modelmi ktoré nemajú minimálny koreň? Tie nás v skutočnosti nemusia zaujímať, keďže ak nemajú minimálny koreň, tak je v ňom splnený nejaký atóm p_i, ten je ale potom splnený vo všetkých vrcholoch modelu. Môžme teda pod koreň pridať ešte jeden vrchol (stane sa novým koreňom), v ňom nesplníme nič, a tento vrchol bude p_i-principálny. Tým sme si z daného modelu vyrobili principálny nadmodel, ktorý už má minimálny koreň. Je teda jasné, že si vždy vystačíme s principálnymi modelmi s minimálnym koreňom. Modely s koreňom, ktorý nie je minimálny, už v nich budú obsiahnuté ako podmely.

Navyše sme ukázali, že zakorenené principálne modely s minimálnym koreňom musia mať obmedzenú výšku a šírku, presnejšie, vypustením koreňa a atómu, ktorý ho robil principálnym, dostávame podmodel predchádzajúceho univerzálneho modelu. Tieto modely teda môžme z predchádzajúceho univerzálneho modelu dostať jediným spôsobom. Vyberieme si ľubovoľný jeho podmodel, pridáme k nemu nový koreň, a vo všetkých vrcholoch okrem koreňa splníme atóm, ktorý sa predtým v danom podmodeli nevyskytoval. Tým sa aj koreň stane principálnym vďaka tomuto atómu. Keďže univerzálny model bol konečný, tak má aj konečný počet podmodelov. Zároveň aj počet atómov, z ktorých si môžme vybrať, aby sme nový koreň spravili principálnym, je určite konečný. Preto týmto jediným možným spôsobom vyrobíme iba konečný počet modelov pre fragment s tromi atómami. K nim pre úplnosť pridáme model s jediným, minimálnym vrcholom, ktorý sme predtým neuvažovali (teoreticky ho dostaneme z prázdnej množiny ako podmnožiny predchádzajúceho univerzálneho modelu). To ale nič nemení na tom, že máme len konečný počet možných modelov. Konečný počet konečných modelov znamená konečný počet rôznych vrcholov a tie už ľahko zostavíme do konečného univerzálneho modelu pre fragment s $n+1$ atómami. □

Pomocou Lemmy 3.5 už ľahko odvodíme nasledujúce najdôležitejšie výsledky našej práce.

Veta 3.6. *Pre každý implikačný fragment intuicionistickej logiky s konečným počtom atómov existuje konečný univerzálny model.*

Dôkaz Máme v rukách univerzálny model pre dva atómy (môžme si všimnúť, že ho dostaneme presne podľa vyššie uvedeného predpisu z univerzálneho modelu pre jeden atóm, ktorý je tvorený jediným minimálnym vrcholom). Indukciou pomocou Lemmy 3.5 ale potom okamžite dostávame, že každý fragment s ľubovoľným konečným počtom atómov má konečný univerzálny model. □

Veta 3.7. *V každom implikačnom fragmente intuicionistickej logiky s konečným počtom atómov existuje len konečný počet neekvivalentných formúl.*

Dôkaz Podľa Vety 3.6 má každý takýto fragment univerzálny model. Ale konečný univerzálny model znamená konečný počet možných definovateľných množín, a to sa rovná konečnému počtu možných neekvivalentných formúl. □

Týmito vetami by sme uzavreli naše skúmanie pozitívnych fragmentov. Podarilo sa nám overiť Urqhartove zistenia o konečnom počte neekvivalentných formúl, aj keď náš zatiaľ najlepší odhad hornej hranice je len počet horných množín vrcholov univerzálneho modelu, čo je horší odhad, ako ten, ktorý podáva Urqhart. Na druhej strane sme ukázali konštrukciu univerzálnych modelov a to znamená, že pre každý takýto fragment máme v rukách polynomiálny algoritmus na rozhodovanie o tom, či je daná formula tautológiou. Jednoducho stačí zobrať univerzálny model daného fragmentu a zistiť, či je skúmaná formula splnená vo všetkých jeho vrcholoch.

V ďalšej časti sa ešte pozrieme na to, ako, a či vôbec, sa situácia zmení, ak si do jazyka pridáme konštantu $\bot$.

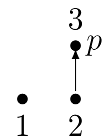
4 Implikačné fragmenty s konečným počtom atómov a konštantou $\perp$

V tejto časti sa pozrieme na to, čo sa zmení, ak si do jazyka pridáme konštantu sporu $\perp$. Predovšetkým tento jazyk už dokážeme konzervatívne rozšíriť o negáciu: $\neg\varphi =_{def} \varphi \to \perp$. Na prvý pohľad sa tak zdá, že sme získali bohatší jazyk a väčšie možnosti pri tvorbe neekvivalentných formúl. Pozrime sa na túto situáciu z hľadiska kripkovských modelov.

Vieme, že v každom modeli musí platiť, že $\perp$ nie je splnený v žiadnom vrchole. Keďže však máme obmedzený počet atómov, tak aj v jazyku bez konštanty $\perp$ ju vieme v modeloch simulovať. Stačí nám do jazyka zaviesť nový atóm, pri hľadaní kripkovských protipríkladov ale tento atóm nemôže byť splnený v žiadnom vrchole žiadneho modelu. V takom prípade sa v podstate dostaneme do jazyka, ktorý sme už skúmali. Z jazyka s n atómami a konštantou $\perp$ sa presunieme do jazyka s $n+1$ atómami ($\perp$ budeme simulovať atómom $p_\perp$). Už vieme, že v tomto jazyku si pri hľadaní protipríkladov vystačíme s principálnymi modelmi. Jediný rozdiel bude v tom, že musíme vyškrtať tie modely, ktoré obsahujú aspoň jeden vrchol, kde je splnený novopridaný atóm $p_\perp$. Ďalšou možnosťou, ako sa na to dá ísť, je hľadať všetky modely, tak ako sme to robili predtým, jediný rozdiel spočíva v tom, že všetky listy akéhokoľvek modelu sú automaticky principálnymi vrcholmi. (Keďže $\perp$ je v nich nesplnený, ale nemajú žiadnych následníkov, takže sa dá povedať, že je splnený všade nad nimi, a preto platí, že každý list je $\perp$-principálny.) V ďalšej časti sa pozrieme na to, ako to vyzerá v tých najjednoduchších fragmentoch.

4.1 Fragment s jedným atómom

Pozrime sa na implikačný fragment intuicionistickej logiky s jediným atómom p a konštantou $\perp$. Ak budeme simulovať konštantu sporu novým atómom q, dostaneme sa do situácie z prvej kapitoly. V tom fragmente poznáme univerzálny model, takže jediné, čo potrebujeme spraviť, je vyškrtnúť vrcholy, v ktorých je splnený atóm q. Keď sa pozrieme, ako sme si vrcholy toho modelu očíslovali, tak dostávame, že musíme vyškrtnúť vrchol číslo 5. Tým ale zároveň vrchol 3 príde o svojho následníka a stane sa nerozlíšiteľným od vrcholu 2, takže ho môžme tiež vypustiť. Tak dostávame univerzálny model pre fragment s jedným atómom a konštantou $\perp$, ktorý sa skladá z troch vrcholov.



Pozrime sa na definovateľné množiny tohto modelu a formuly, ktoré ich definujú. (Tento vzťah opäť zachytíme symbolom $\rightleftharpoons$.) V modeli máme šesť horných množín, a každej z nich vieme priradiť formulu, ktorá je splnená práve v daných vrcholoch.
$\emptyset \rightleftharpoons \bot$, $\{1\} \rightleftharpoons \neg p$, $\{3\} \rightleftharpoons p$, $\{2,3\} \rightleftharpoons \neg p \to p$, $\{1,3\} \rightleftharpoons (\neg p \to p) \to p$, $\{1,2,3\} \rightleftharpoons pp$. V tomto fragmente teda existuje práve šesť neekvivalentných formúl.

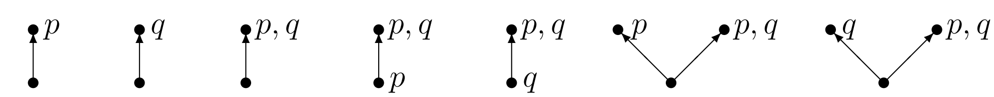
4.2 Fragment s dvomi atómami

Pre fragment s dvomi atómami môžme zvoliť dve cesty pri hľadaní principálnych modelov. Prvá, uplatnená v predchádzajúcej časti tejto kapitoly, vraví, že máme zobrať modely pre pozitívny fragment s tromi atómami, a z nich len tie modely, v ktorých nikde nie je splnený tretí atóm. Druhá, uplatnená v predchádzajúcej kapitole, nám hovorí, že máme zobrať podmodely predchádzajúceho univerzálneho modelu, pripojiť k nim nový koreň a všade okrem koreňa splniť nový atóm (plus permutovať atómy). Ľahko overíme, že sú to dva ekvivalentné postupy, teda že vedú k rovnakému výsledku. Prvou cestou sa dopracujeme k nasledujúcemu zoznamu modelov.

– modely hĺbky 0

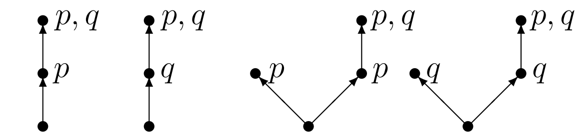
M1 M2 M3 M4

– modely hĺbky 1

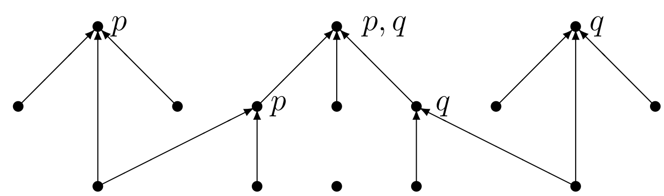


M5 M6 M7 M8 M9 M10 M11

– modely hĺbky 2



Vidíme, že modely M2–M4, M8 a M9 sú vlastne zbytočné, pretože ich máme obsiahnuté v ostatých modeloch. Po odstránení týchto modelov nám ostanú presne tie isté modely, ktoré by sme dostali druhou cestou. Z týchto modelov opäť jednoducho zostrojíme univerzálny model, ktorý sa skladá z pätnástich vrcholov.



Univerzálny model pre fragment s dvomi atómami a konštantou $\perp$

Môžme si všimnúť, že tento univerzálny model je podmodelom univerzálneho modelu pre pozitívny fragment s tromi atómami, ktorý dostaneme vyhodením všetkých vrcholov, v ktorých je splnený atóm r, a následným zredukovaním nadbytočných vrcholov (napríklad minimálne vrcholy, ktoré stratia niektorých následníkov, sa stanú nerozlíšiteľné od vrcholov, ktoré tam už máme, a pod.). To potvrdzuje naše pozorovanie o možnosti simulovať konštantu $\perp$ novým atómom s obmedzujúcimi podmienkami.

4.3 Zhrnutie

Na základe toho, čo sme ukázali, totiž, že konštanta $\perp$ sa v implikačnom fragmente s konečným počtom atómov dá chápať ako nový, aj keď neplnohodnotný atóm, môžme vysloviť nasledujúce vety.

Veta 4.1. *Pre každý implikačný fragment intuicionistickej logiky s konečným počtom atómov a konštantou $\perp$ existuje konečný univerzálny model.*

Dôkaz Ako sme už naznačili vyššie, konštantu $\perp$ vieme v modeloch simulovať pridaním nového atómu, ktorý nemôže byť v žiadnom vrchole splnený. Z toho ale vyplýva, že univerzálny model pre negatívny fragment s n atómami, dostanem z univerzálneho modelu pre pozitívny fragment s $n+1$ atómami, a to vyškrtaním všetkých vrcholov v ktorých je splnený posledný atóm, a následnou redukciou modelu na jeho najjednoduchšiu verziu. Tým myslíme odstránenie vrcholov, ktoré sa nám opakujú (každý vrchol tam chceme mať len raz). $\square$

Veta 4.2. *Ak si označime počet neekvivalentných formúl v implikačnom fragmente intuicionistickej logiky s n atómami ako* $|\mathrm{Int}_{\to,n}|$ *a počet neekvivalentných formúl fragmentu s n atómami a konštantou* $\perp$ *ako* $|\mathrm{Int}_{\to,\perp,n}|$, *tak platí jednoduchá nerovnica*

$$|\mathrm{Int}_{\to,n}| < |\mathrm{Int}_{\to,\perp,n}| < |\mathrm{Int}_{\to,n+1}| \,.$$

Dôkaz Prvá nerovnosť je zrejmá, keďže rozširujeme jazyk. Všetky formule, ktoré boli neekvivalentné, ostanú neekvivalentné aj keď si do jazyka pridáme konštantu $\perp$, tá nám ale navyše rozšíri možnosti tvorby ďalších formúl (minimálne formula $\perp$ sama o sebe bude v tomto fragmente navyše). Druhá nerovnosť vyplýva z toho, čo sme si ukázali, totiž že $\perp$ vieme simulovať pridaním nového atómu. Tým vieme nasimulovať všetky formuly z fragmentu $\mathrm{Int}_{\to,\perp,n}$, takže neostrá nerovnosť je zaručená. Dovoľujeme si však použiť ostrú nerovnosť, keďže čo sa týka kripkovských protipríkladov, tých máme vo fragmente $\mathrm{Int}_{\to,n+1}$ skutočne viac. Vo fragmente $\mathrm{Int}_{\to,\perp,n}$ totiž musíme vyškrtať všetky, ktoré obsahujú nejaký svet so splneným atómom p_{n+1}. A viac protipríkladov znamená viac neekvivalentných formúl. $\square$

Z týchto viet vyplýva, že všetky negatívne implikačné fragmenty s konečným počtom atómov, rovnako ako pozitívne, nie sú PSPACE-kompletné. Navyše fragment $\mathrm{Int}_{\to,\perp,n}$ tvorí, čo sa týka zložitosti, akýsi medzistupeň medzi fragmentami $\mathrm{Int}_{\to,n}$ a $\mathrm{Int}_{\to,n+1}$.

5 Záver

Na záver si zhrnieme témy, ktorým sme sa v tejto práci venovali, a závery, ku ktorým sme dospeli.

Najprv sme sa podrobne venovali implikačnému fragmentu intuicionistickej logiky s dvomi atómami. Tam sme overili výsledok Sachia Hirokawu z [Hir94], ktorý tvrdil, že v tomto fragmente existuje štrnásť neekvivalentných formúl, a zachytili sme vzťahy medzi týmito formulami do obrázku. V tomto obrázku šípka z jednej formule do druhej nám vraví, že druhá formula už vyplýva z prvej. Absolútnu istotu o vzťahoch v tomto fragmente nám dala až práca s principálnymi modelmi.

Principálny model je model, ktorý sa skladá len z principálnych vrcholov, pričom vrchol je principálny, ak existuje atóm, ktorý je v ňom nesplnený, ale všade nad ním už splnený je. Ukázali sme, že pri hľadaní kripkovských protipríkladov, teda pri dokazovaní neekvivalencie formúl, si vystačíme s principálnymi modelmi. To bol dôležitý výsledok, pretože zakorenených principálnych modelov je vo fragmente s dvomi atómami len málo, a, čo bol náš ďalší dôležitý výsledok, zakorenených principálnych modelov v každom implikačnom fragmente s konečným počtom atómov je konečne veľa.

Na základe týchto modelov sme boli schopní zostojiť univerzálny model pre fragment s dvomi atómami. To znamená model, ktorý obsahuje protipríklad na každú formulu daného fragmentu, ktorá nie je logicky platná. Navyše sme podali návod na konštrukciu konečného univerzálneho modelu pre fragment s $n + 1$ atómami z univerzálneho modelu pre fragment s n atómami. Tým sme vlastne ukázali, že každý takýto fragment má svoj univerzálny model. Týmto zistením sme overili Urqhartov výsledok z [Urq74] o konečnom počte neekvivalentných formúl v týchto fragmentoch, aj keď zatiaľ sme neboli schopní dospieť k rovnako dobrým ohraničeniam ako on. Nájsť lepšie hornú hranicu ako len počet horných množín vrcholov v univerzálnom modeli a nájsť aj spodnú hranicu teda ostávajú ako zatiaľ nedoriešené problémy. Naopak, to, že každý takýto fragment má svoj konečný univerzálny model, znamená, že pre každý takýto fragment máme polynomiálny algoritmus na rozhodnutie o logickej platnosti formúl tohto fragmentu. Implikačné fragmenty intuicionistickej logiky s konečným počtom atómov teda nie sú PSPACE-kompletné.

Okrem pozitívnych fragmentov sme sa zaoberali aj fragmentami s konštantou $\perp$. Zistili sme, že sa síce jedná o rozšírenie toho ktorého fragmentu, ide ale o slabšie rozšírenie ako pridanie nového atómu. To znamená, že pridaním konštanty $\perp$ do implikačného fragmentu s n atómami síce sme schopní vytvoriť nové neekvivalentné formuly, bude ich ale menej, ako keby sme si do jazyka pridali úplne nový atóm. Rovnako z pohľadu kripkovských modelov vieme konštantu $\perp$ simulovať novým atómom, ktorý nebude v žiadnom modeli splnený. Tým sme dostali, že aj fragmenty s pridanou konštantou $\perp$ majú svoj univerzálny model, pričom ten je podmodelom univerzálneho modelu pozitívneho fragmentu s jedným atómom navyše. Tak sme ukázali, že pridanie konštanty $\perp$ do implikačného fragmentu s konečným počtom atómov nič nemení na konečnosti počtu neekvivalentných formúl, aj keď tento počet značne vzrastie. Rovnako to znamená, že ani tieto fragmenty nie sú PSPACE-kompletné.

Ako táto práca ukázala, v intuicionistickej logike, dokonca aj len v jej výrokovej časti, sa stále nachádza množstvo zaujímavých tém, ktoré sú ešte nepreskúmané, alebo čakajú na svoju väčšiu popularizáciu.

Literatúra

[Hir94] Sachio Hirokawa. A characterization of implicational axiom schema playing the role of Peirce's law in intuitionistic logic. Technical report, Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University, 1994. `https://qir.kyushu-u.ac.jp/dspace/bitstream/2324/3189/1/rifis-tr-93.pdf/`.

[Lad77] Richard Ladner. The computational complexity of provability in systems of modal logic. *SIAM J. Comput.*, 6(3):467–480, 1977.

[Nis60] Iwao Nishimura. On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus. *J. Symb. Log.*, 25(4):327–331, 1960.

[Rie49] Ladislav S. Rieger. On lattice theory of Brouwerian propositional logic. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Univ. Carolinae*, 189:1–40, 1949.

[Ryb06] Mikhail N. Rybakov. Complexity of intuitionistic and Visser's basic and formal logics in finitely many variables. In G. Governatori, I. Hodkinson, and Y. Venema, editors, *Advances in Modal Logic 6 (AiML'06)*, pages 394–411, Noosa, Australia, September 2006. King's College Publications, 2006.

[Sta79] Richard Statman. Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete. *Theoretical Comp. Sci.*, 9:67–72, 1979.

[Šve02] Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, Praha, 2002.

[Šve03] Vítězslav Švejdar. On the polynomial-space completeness of intuitionistic propositional logic. *Archive Math. Logic*, 42(7):711–716, 2003.

[Urq74] Alasdair Urquhart. Implicational formulas in intuitionistic logic. *J. Symb. Logic*, 39(4):661–664, 1974.